Poincare Duality の単純性(変換群論と代数的位相幾何学)

永田, 雅嗣

数理解析研究所講究録
793巻 1992年 94-119

Poincaré Dualityの単純性

京都大学 数理解析研究所
永田 雅嗣
Masatsugu Nagata

有限群Gの作用する多様体についての、一般の設定での同変surgery については、様々な立場からの設定があるものの、カテゴリカルな視点に立った自然な設定がこれまで欠けていたように思われる。最近、Costenoble と Waner によって、G-多様体の各点での接表現の互いにからみ合った状況をカテゴリカルにとらえ、それを表現する同変(コ)ホモロジーを作る試みがなされている。ここでは、彼らの構成した(コ)ホモロジーについてのG-多様体のPoincaré Dualityが、単純ホモトピー同値の意味にまで拡張されることを確かめる。これを出発点に、自然な同変surgeryの理論が構成できることをめざしたい。

以下、Gは常に有限群とする。

§1. 向きづけの定義

[CMW] に従って向きづけの定義を述べよう。この稿の目的は、この定義によってG-多様体のsimple Poincaré Dualityがいかに自然に定まるかを見ることにある。

$E \xrightarrow[p]{} B$ を、G-O(n)-バンドルとする。このバンドルの素朴な向きづけの定義は、『任意の $H<G$ と任意の $b, b' \in B^H$ に対して、ファイバー E_b から $E_{b'}$ への b と b' とを結ぶ path によって定まる H-同型写像の H-同型類が、path の選びかたによらない』ということである。この概念を、カテゴリー的に定式化してみよう。

$h\mathcal{O}$ を、軌道圏のホモトピー圏とする。すなわち、G/H ($H<G$) を object とし、G-写像 $\alpha : G/H \to G/K$ の G-ホモトピー類を morphism とする。

G-空間 X に対し、『X の基本 groupoid』$\pi(X:G)$ を、次のように定義する。まず、G-写像 $x : G/H \to X$ を object とする。$x(eH)$ は X^H の点だから、x とは

$X^H \ni x$ に 部分群 $H < G_x$ を指定したものとみなすことができる。$(x : G/H \to X)$ から $(y : G/K \to X)$ への morphism $[\alpha, \omega]$ は、G-写像 $\alpha : G/H \to G/K$ と、x と $y \circ \alpha$ とを結ぶ G-ホモトピー $\omega : G/H \times I \longrightarrow X$ との組の同値類とする。ただし、$(\alpha, \omega) \sim (\alpha', \omega') \iff \alpha = \alpha'$ かつ $\omega \underset{G}{\simeq} \omega'$ と定義する。

注意。$x : G/H \longrightarrow X$ を固定したときに、x から x への morphism 全体は、通常の意味の基本群 $\pi_1(X^H)$ に一致することがたやすくわかるので、これは自然な定義である。

$h\mathcal{O}_G$ を、軌道上のバンドルの圏のホモトピー圏とする。すなわち、G-O(n)-バンドル $E \xrightarrow[p]{} G/H$ を object とし、G-バンドル写像（各ファイバーで同型となる G-写像）

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ G/H & \xrightarrow{\alpha} & G/K \end{array}$$

のホモトピー類を morphism とする。

ただし、ホモトピーは

$$\begin{array}{ccccc} E \times I & & \longrightarrow & & E' \\ {\scriptstyle p \times I}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ G/H \times I & \longrightarrow & G/H & \xrightarrow{\alpha} & G/K \end{array}$$

という形の G-バンドル写像のことである。

これらの圏の間に、次のような関手を定義する。

$$\varphi : \pi(X:G) \longrightarrow h\mathcal{Y} \quad : \begin{cases} (G/H, x) \mapsto G/H \\ [\alpha, \omega] \mapsto \alpha \end{cases}$$

$$\psi : \quad h\mathcal{O}_G \longrightarrow h\mathcal{Y} \quad : \begin{cases} (E \xrightarrow[p]{} G/H) \mapsto G/H \\ [\alpha, f] \mapsto \alpha \end{cases}$$

さらに、G-バンドル $E \xrightarrow[p]{} B$ に対して、『pullback関手』
$p^* : \pi(B:G) \longrightarrow h\mathcal{O}_G$ を、

$$(G/H, x) \longmapsto (x^*E \xrightarrow[x^*p]{} G/H)$$

により定義する。ただし、morphismの対応は、G-CHP によってその存在と一意性が保障される。p^* は、$h\mathcal{Y}$ 上の関手である。すなわち、

$$\begin{tikzcd} \pi(B:G) \arrow[rr, "p^*"'] \arrow[dr, "\varphi"'] & & h\mathcal{O}_G \arrow[dl, "\psi"] \\ & h\mathcal{Y} & \end{tikzcd}$$

は可換である。また、G-バンドル写像

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

に対しては、自然変換

$$\begin{pmatrix} \pi(B:G) \\ p^* \downarrow \\ h\mathcal{O}_G \end{pmatrix} \xrightarrow[f_\#]{} \begin{pmatrix} \pi(B:G) \\ p'^* \downarrow \\ h\mathcal{O}_G \end{pmatrix}$$

が定まることも、容易にわかる。

<u>定義</u>。　G-バンドル $E \xrightarrow[p]{} B$ が orientable とは、『任意の $[\alpha, \omega]$, $[\alpha, \omega'] \in \pi(B:G)$ に対して、
$p^*[\alpha, \omega] = p^*[\alpha, \omega']$ が $h\mathcal{O}_G$ の morphism として一致する』ことと定義する。

この定義は、上で述べた「素朴な定義」を、ここで定義した圏の言葉で言い換えたにすぎない。

自然数 n を固定する時、$h\mathcal{O}_n$ を、$h\mathcal{O}_G$ の部分圏で n 次元のバンドルのみからなるものとする。（注意。universe を固定することにより、$h\mathcal{O}_n$ は small category にとることができる。[CMW, Remark 2.6.]）

一般に、G-空間 X に対して、$h\mathcal{Y}$ 上の関手

$$\rho:\quad \begin{tikzcd} \pi(X:G) \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"'] & & h\mathcal{O}_n \arrow[dl, "\psi"] \\ & h\mathcal{Y} & \end{tikzcd}$$

を、基本 groupoid $\pi(X:G)$ の n 次元表現と呼ぶ。$E \xrightarrow[p]{} B$ が実 n 次元ベクトルバンドルの時は、上で定めたように、自然に n 次元表現 $p^*: \pi(B:G) \longrightarrow h\mathcal{O}_n$ が決まる。これは言いかえれば各 $H < G$ に対して B^H の各点ごとに G/H 上の n 次元 G-ベクトルバンドルを指定したことを意味している。

注意. $E \xrightarrow[p]{} B$ が orientable であることは、『$h\mathcal{G}$ の任意の morphism を固定した時、$\pi(B:G)$ におけるその逆像が、$h\mathcal{O}_n$ においてすべて共通の値を持つ』ということと同値である。[CMW] では、この圏論的特徴づけを使って、「universal な orientation class」を定義している。

§2. G-多様体の Poincaré Duality

次に、[CW] に従って、G-多様体の Poincaré Duality について述べよう。M を n 次元 smooth G-多様体とする。その接バンドルから前節の方法によって定まる n 次元表現を、

$$\mu(M): \ \pi(M:G) \longrightarrow h\mathcal{O}_n$$

とする。ここで、表現を virtual なものに拡張して考えよう。通常の意味の G-表現空間 V に対して、それをファイバーとする自明ベクトルバンドルを $\underline{V}$ と書き、このバンドルから定まる自明な「n 次元表現」も、

$$\underline{V} \ : \ \pi(X:G) \longrightarrow h\mathcal{O}_n$$

で表わす。(各 object $x \in X^H$ に対し、自明バンドル $G/H \times V \longrightarrow G/H$ を対応させる。)

$n \in \mathbb{Z}$ に対して、virtual バンドルの圏 $v\text{-}\mathcal{O}_n$ を、次のよ

うに定義する。バンドルの対

$$\left(\begin{matrix} E \\ p\downarrow \\ G/H \end{matrix} \in h\mathcal{O}_{r+n} ,\ \begin{matrix} F \\ q\downarrow \\ G/H \end{matrix} \in h\mathcal{O}_{r} \right)$$ （ただし $r+n \geq 0,\ r \geq 0$）

を object とし、 morphism $(f_1, f_2) : \begin{matrix}(E, F) \\ \downarrow \\ G/H\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}(E', F') \\ \downarrow \\ G/K\end{matrix}$ は、

$$f_1 : E \oplus \underline{\underline{W}} \longrightarrow E' \oplus \underline{\underline{W}}'$$
$$f_2 : F \oplus \underline{\underline{W}} \longrightarrow F' \oplus \underline{\underline{W}}'$$

（ただし W は H-表現空間, W' は K-表現空間）という型のバンドル写像の同値類であって、その同値関係は

(1) G-表現空間 V に対する $- \oplus \underline{\underline{V}}$

(2) W と W' の、それぞれの同変 isometry による変換

(3) バンドル写像のホモトピー

によって生成されるものとする。

以下、すべての理論は、基本 groupoid $\pi(M:G)$ の、$v\mathcal{O}_n$ への表現を対象として記述する。

圏 $\mathcal{GRU}$ を、G-空間 X と表現 $\gamma : \pi(X:G) \to v\mathcal{O}_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ との対を object とし、G-写像 $f : X \to Y$ と f から導かれる表現の間の自然変換との対を morphism とする圏と定義する。

$G\mathcal{R}\mathcal{U}$ のホモトピー圏 $h G\mathcal{R}\mathcal{U}$ も自然に定義される。ただし、ホモトピーの定義域 $(X, \gamma)\times I$ とは、合成

$$\pi(X\times I : G) \xrightarrow[\text{canonical}]{} \pi(X : G) \xrightarrow[\gamma]{} v\mathcal{O}_n$$

によって定まる object としておく。

Costenoble と Waner は、[CW] において、この圏 $G\mathcal{R}\mathcal{U}$ をもとにして G-CW 複体に対する自然な安定 cellular 理論を構成し、それを用いれば古典的な cellular 理論に基づいた多様体の Poincaré 双対性の構成と全く同じ方法を繰り返すことにより、G-多様体についての Poincaré 双対性が構成できることを示した。彼らの主結果をまとめてみよう。

<u>定理 $A_{[CW]}$</u>（同変ホモロジー） $(X, \gamma)\in G\mathcal{R}\mathcal{U}$,
(X, A) : G-空間の対, T : X 上の局所係数に対し、
Bredon (コ)ホモロジーの拡張となる（コ）ホモロジー論

$$H^G_\gamma(X, A ; T), \qquad H_G^\gamma(X, A ; T)$$

が存在し、通常と同じ長完全列をもち、

G-表現 V についての懸垂同型 $\sigma_V : H^G_\gamma(X,A;T)\cong H^G_{\gamma+\underline{V}}((X,A)\times(DV,SV);T)$

G>K への制限準同型 ρ : $H^G_\gamma(X,A;T)\longrightarrow H^K_{\gamma|_K}(X,A;T|_K)$

G>K での不動点準同型 ϕ : $H^G_\gamma(X,A;T)\longrightarrow H^{WK}_{\gamma^K}(X^K,A^K;T^K)$

さらに

カップ積 $\cup$: $H_G^{\gamma}(X,A;S)\otimes H_G^{\delta}(Y,B;T)\longrightarrow H_G^{\gamma+\delta}((X,A)\times(Y,B);S\square T)$
キャップ積 $\cap$: $H_G^{\delta}(X,B;S)\otimes H^G_{\gamma+\delta}(X,A\cup B;T)\rightarrow$

$$H^G_{\gamma}(X,A;S\underset{\hat{\pi}X}{\otimes}\Delta_* T)$$

をもつ。

<u>注意</u>。$\pi(X:G)$ の morphism を invert して作った stable 圏を $\hat{\pi}X$ と書くことにすると、「X 上の局所係数」とは、加法的な反変関手 $T:\hat{\pi}X\longrightarrow \mathcal{A}b$ のことである。これは、通常の意味の Mackey 関手の、圏 $\pi(X:G)$ 上への一般化にあたる。

<u>定理 B</u> [CW] (Poincaré 双対性) M がコンパクト G-多様体、その接バンドルによる表現を $\mu(M):\pi(M:G)\rightarrow h\mathcal{O}_n$ とする。$\mathcal{A}_G$ を、$h\mathcal{G}$ 上から自然に決まる Burnside 環局所係数とするとき、基本類 $[M,\partial M]\in H^G_{\mu(M)}(M,\partial M;\mathcal{A}_G)$ が存在して、

$$-\cap[M,\partial M]\ :\ H_G^{\gamma}(M;\mathcal{A}_G)\longrightarrow H^G_{\mu(M)-\gamma}(M,\partial M;\mathcal{A}_G)$$
$$-\cap[M,\partial M]\ :\ H_G^{\gamma}(M,\partial M;\mathcal{A}_G)\longrightarrow H^G_{\mu(M)-\gamma}(M;\mathcal{A}_G)$$

は任意の表現 $(X,\gamma)\in v\mathcal{O}_n$ に対して同型である。

<u>定理 C</u> [CW] (Thom 同型) $\xi\rightarrow X$ を G-ベクトルバンドル, $\rho:\pi(X:G)\rightarrow h\mathcal{O}_n$ を対応する表現とするとき、

Thom 類 $t_\xi \in H_G^\rho(D\xi, S\xi; \mathcal{A}_G)$ が存在して、

$$- \cup t_\xi : H_G^\gamma(X; T) \longrightarrow H_G^{\gamma+\rho}(D\xi, S\xi; T)$$

が任意の表現 $(X, \gamma) \in v\mathcal{O}_n$ と任意の局所係数 T に対して同型である。

§3. Simple Poincaré Duality

Wall の教科書 [W] の Corollary 2.1 は、surgery を構成する上での一つの出発点である。それは、単純ホモトピー同値 $\varphi : M \longrightarrow X$ （M は多様体、X は有限単体複体）が与えられた時に、X が単純有限 Poincaré 複体の構造を持つ、という主張である。

G－作用の下での G－surgery の構成の上でも、同じ形で単純 Poincaré 複体が得られることが望ましい。そこで、Costenoble－Waner の同変 cellular 理論に、単純ホモトピー論の方法が適用できるかどうかを見る。

ホモロジーを、「表現」を次数に持ち、「表現」を（局所）係数に持つもので考えているのだから、同変 cell 分割を考える際にも、「表現」を cell と考えるのが自然である。そこで次のように定義する。

定義. $(X,\gamma)\in G\mathcal{R}\mathcal{U}$, $\gamma:\pi(X:G)\to h\mathcal{O}_\ell$ とする。
X が G-CW(γ)-複体とは、$X=\varinjlim X^n$ であって、

$$X^0=\coprod(x: G/H\to X),\quad \text{ただし } \gamma(x)=G/H\times\mathbb{R}^\ell \ (\text{自明バンドル}),$$

$$X^n = X^{n-1}\cup_{\varphi_{n-1}}\Big(\coprod_i e_i^n\Big),$$

ここで各 n-cell e_i^n は次の条件を満たすものとする。

中点 $x: G/H\to e_i^n$ が指定されていて、

$$\begin{tikzcd} \psi_i:\ e_i^n \arrow[rr, "\cong"] & & D(\gamma(x)\oplus\underline{\mathbb{R}}^{n-\ell}) \\ & G/H \arrow[ul, "x"] \arrow[ur, "\text{零切断}"'] & \end{tikzcd}$$

が G-同相, かつ図式を可換にする

とする。ただし、$n<\ell$ の場合には、$\gamma(x)$ に $\underline{\mathbb{R}}^{\ell-n}$ が直和因子として含まれていることを仮定する。

(X,γ) が G-CW(γ)-複体, (Y,δ) が G-CW(δ)-複体のとき、G-写像 $f: X\to Y$ が cellular 写像とは、$(\pi(X:G)\xrightarrow{\gamma} h\mathcal{O}_\ell)$ から $(\pi(Y:G)\xrightarrow{\delta} h\mathcal{O}_\ell)$ への自然変換(各 object ごとにバンドル写像を与えるもの)が指定されていて、それを通じて f が上記の cell 構造を保つものとする。
すると、標準的な圏論の手法によって、次が従う。

cellular 近似定理 [CW, Theorem 3.7] X を G-CW(γ)-複体, Y を G-CW(δ)-複体とする。$f: X\to Y$ が G-写像で,

fを通じて$\mathcal{F}$から$\mathcal{F}'$への自然変換が存在すれば、fはcellular写像とG-ホモトピックである。

CW-複体が一旦定義されれば、古典的な方法（[M], [C], [I1], [A]等を参照）に従って単純ホモトピー論が定義できる。

__定義__。$(X, \mathcal{F}) \supset (Y, \mathcal{F}|_Y)$がelementary expansionとは、

$X = Y \cup e^{n-1} \cup e^n$ であって、

$$\begin{aligned} e^n &= G \times_H D(V \oplus \mathbb{R}) \cong G \times_H DV \times I \quad (V\text{は}H\text{-表現空間}) \\ &\cup \\ e^{n-1} &= G \times_H DV \times \{1\} \cup G \times_H SV \times I \end{aligned}$$

となっているときをいう。

__定義__。G-CW$(\mathcal{F})$-複体$(X, \mathcal{F})$に対して、Whitehead群を

$$Wh_G(X, \mathcal{F}) = \left\{ (Z, X) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{relatively finite な G-CW}(\mathcal{F})\text{-対で} \\ \text{包含写像がG-強deformation retract} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

とおく。ただし、同値関係$\sim$は、上記のelementary expansion（とその逆のelementary collapse）によって生成されたものとする。加法$(Z, X) \cup (Z', X) = (Z \cup_X Z', X)$により、これはアーベル群となる。

$Wh_G(X, \mathcal{F})$がG-CW$(\mathcal{F})$-複体の圏の上のホモトピー関

手を与えることは容易にわかり、従って．G-cellular 写像 $f: X \to Y$ の Whitehead torsion $\tau(f)$ が，

$$\tau(f) = [M_f \underset{X}{\cup} M_f , Y] \in Wh_G(Y, \gamma)$$

によって定義できる。ただし M_f は f の写像柱である。

$\tau(f)=0$ であることと．f が elementary expansion と elementary collapse の合成にホモトピックであることとは同値であり、このことを f が単純ホモトピー同値であるという。

Cohen [C, §7] の手法をそのままたどることにより、次の「simplified form」も得られる。

<u>補題</u>　(Z, X) が relatively finite な G-CW(γ)-対で包含写像が G-強deformation retract とする。このとき、(Z, X) を単純ホモトピー同値（rel. X）で (Z', X) にとりかえて、

$$Z' = X \cup \left(\bigcup_{j=1}^{a} e_j^{r-1}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{a} e_i^{r}\right) \qquad (\exists r)$$

とできる。

前節でも述べたように、ホモロジーを定義するチェイン複体を考える際には、圏 $\pi(X:G)$ を安定圏 $\hat{\pi}(X:G)$ に拡張して

考える。これは、object は同じで、morphism は $\pi(X;G)$ での $x \leftarrow z \rightarrow y$ という形のものを $\hat{\pi}(X;G)$ での x から y への morphism とみなしたものである。この圏をもとにして代数的な Whitehead 群の定義を与えよう。

(X, γ) を G-$CW(\gamma)$-複体とする。$\hat{\pi}(X;G)$ の object $x: G/H \to X$ に対し、
$$\gamma(x) = \left(\begin{pmatrix} G\times_H V \\ \downarrow \\ G/H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G\times_H W \\ \downarrow \\ G/H \end{pmatrix} \right)$$
と書ける。

このとき、
$$C_{\gamma+n}(X)\ (x) = \left\{ G\times_H (S^V \wedge S^n)\ ,\ \tilde{X}^n(x)/\tilde{X}^{n-1}(x) \ \hat{\wedge}_{G/H}\ G\times_H (S^W \wedge S^{|\gamma(x)|}) \right\}_{G/H}$$
と定義する。([CW, Lemma 4.2] を参照) ただし、$\{\ ,\ \}_{G/H}$ は空間 G/H 上の写像の安定ホモトピー類の群であり、X^n は G-$CW(\gamma)$-複体 X の n-骨格、$\tilde{X}(x)$ は、(点 x に関わる各種の軌道類に対応するため) 次のようにとりかえるものとする。まず $x: G/H \to X$ に対し $\mathcal{O}$ の中で $G/K \to G/H$ という形の morphism をすべて考え、その K ごとに空間 X^K の普遍被覆空間 $\tilde{X}^K$ をとる。そこで関手 $(G/K \to G/H) \mapsto \tilde{X}^K$ の Elmendorf 構成によって得られる空間を、$\tilde{X}(x)$ とおく。

<u>補題</u> [CW, Lemma 4.2] 次は $\hat{\pi}(X;G)$ から $\mathcal{Ab}$ への反変関手として canonical に同型となる。
$$C_{\gamma+n}(X)\ (x) \cong \sum_{x_0:\, X \text{の } n\text{-cell の中心}} \hat{\pi}(X;G)(x, x_0)$$

これによって、関手 $C_{\gamma m}(X)$: $\Pi(X:G) \to \mathcal{A}b$ は、いわば $\Pi(X:G)$-free な構造を持つことになる。ここで基本的な定義をしよう。

<u>定義</u>. 関手 C : $\Pi(X;G) \longrightarrow \mathcal{A}b$ が free とは、自然同型 $C \cong \sum_i \Pi(X;G)(-, x_i)$ が存在することをいう。C が based とは、そのような同型対応が指定されたこととする。

代数的な Whitehead 群を与える前に、$\Pi(X;G)$ の部分圏を定義しておく。

<u>定義</u>. $\Pi_\gamma(X:G)$ とは、$\Pi(X:G)$ の部分圏であって、x から y への morphism を、$x \xleftarrow{\alpha} z \xrightarrow{\beta} y$ という形のもののうち、α が $\gamma(x)$ の中に faithful に実現できるものに制限したものとする。つまり、バンドル $\begin{array}{c}\gamma(x) = G \times_H V \\ \downarrow \\ G/H\end{array}$ の全体空間の中に、z の定義域 G/K が $\alpha : G/K \longrightarrow G/H$ と可換になるように単射で埋め込まれている、という条件を与える。

$\Pi(X:G)$ をすべて $\Pi_\gamma(X:G)$ でとりかえることにより、今までの議論はそのまま平行に成り立つ。そこで、Lück [L]

の方法にならって代数的 Whitehead 群を与えよう。

$\mathcal{F}_\gamma$ を、有限次元で free な関手 $C: \hat{\mathcal{C}}_\gamma(X:G) \longrightarrow \mathcal{Ab}$ の全体のなす圏とする。$K_1(\mathcal{F}_\gamma)$ を、$\mathcal{F}_\gamma$ の morphism で定義域と値域が一致するもの全体の張る自由アーベル群に、

$[f \circ g] \sim [f] + [g]$, および
$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B \end{array}$$
という場合の $[f] \sim [f_1] + [f_2]$ の関係を入れた群とする。

<u>定義</u>。 $$Wh_G(\hat{\mathcal{C}}X, \gamma) = K_1(\mathcal{F}_\gamma) \big/ (\text{trivial units})$$

ただし、trivial units とは、

(1) $\alpha: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ に対する $\hat{\mathcal{C}}_\gamma(X:G) \xrightarrow{\alpha_*} \hat{\mathcal{C}}_\gamma(X:G)$

$: [y \xrightarrow{\beta} x] \longmapsto [y \xrightarrow{\beta} \mathcal{X} \xrightarrow{\alpha} x]$ という変換

(2) $\gamma(x)$ の表現空間における G-linear 同型から導かれた $\hat{\mathcal{C}}_\gamma(X:G)$ の変換

とする。

古典的方法に従って調べることにより、Whitehead 群の幾何的定義と代数的定義とが、ここでも一致することがわかる。

<u>定理 1.</u> $$Wh_G(X, \gamma) \cong Wh_G(\hat{\mathcal{C}}X, \gamma)$$

［証明］　まず、左辺から右辺への対応を作る。$\mathrm{Wh}_G(X, \gamma) \ni (Z, X)$ に対して、そのチェイン複体 $C_{\gamma+*}(Z, X)$ を考える。上の補題によって、これは based な $\mathfrak{A}_\gamma(Z:G)$ 上の free 関手である。条件からこのチェイン複体は acyclic であるからそのレトラクション s を選ぶことができ、自己写像

$$\partial + s : C_{\gamma+odd}(Z, X) \longrightarrow C_{\gamma+even}(Z, X)$$

という based な関手の間の同型写像の表現する $K_1(\mathfrak{F}_\gamma)$ の元を得る。レトラクション s をとりかえても、$K_1(\mathfrak{F}_\gamma)$ の trivial units の分しか変更されないことがわかり、$\mathrm{Wh}_G(\mathfrak{A}X, \gamma)$ の元としては well-defined であることがわかる。（Lück[L] の §11 をそのままたどることが可能であるので、この場合も成立する。詳細は [L] を参照。）

次に、対応が単射であることを示す。$[Z, X]$ が $\mathrm{Wh}_G(\mathfrak{A}X, \gamma) \ni 0$ に移るとする。前記の補題により、(Z, X) は「simplified form」としてよい。つまり、チェイン複体 $C_{\gamma+*}(Z, X)$ は r 次元と $r-1$ 次元のみに元があり、r-cell から $r-1$-cell への貼りつけ写像のあらわす行列が、$\mathrm{Wh}_G(\mathfrak{A}X, \gamma)$ の元を与えている。これが $0 \in \mathrm{Wh}_G(\mathfrak{A}X, \gamma)$ であるということは、行列の基本変型と trivial unit の積とによって恒等行列に変換できるということである。

その変換の一つを

$$\varphi_i \longmapsto \varphi_i + \varphi_j \circ f \quad , \quad f : c_i \to c_j \in \hat{\mathcal{C}}_\gamma(X:G) : \text{trivial unit}$$

とする。この変換のあらわす $\hat{\mathcal{C}}_\gamma(X:G)$ 上の自然変換を考え、その $c_i \in \hat{\mathcal{C}}_\gamma(X:G)$ での値を考えると、それは

$$\begin{array}{ccccc} G/H & \xleftarrow{\alpha} & G/L & \xrightarrow{\beta} & G/K \\ {\scriptstyle c_i}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_j} \\ X & & X & & X \end{array}$$

およびそれぞれのバンドル写像の間のホモトピーを与える。

バンドルの段階では

$$\begin{array}{ccccc} e_i^{r-1} = D(\gamma(c_i)) & & & & D(\gamma(c_j)) = e_j^{r-1} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ G/H & \xleftarrow{\alpha} & G/L & \xrightarrow{\beta} & G/K \end{array}$$

となり、$\hat{\mathcal{C}}_\gamma(X:G)$ の定義から G/L が e_i^{r-1} に埋め込まれている。そこで、そのホモトピーは、次のような標準的なホモトピーにとりかえることができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} e_i^{r-1} \supset c_i(G/L) \text{ をまず } \partial e_i^{r-1} \text{ に動かし、} \\ \text{次にそこで } \varphi_i(c_i(G/L)) \text{ を } \varphi_j(c_j(G/L)) \text{ と結び、} \\ \text{さらに } e_j^{r-1} \text{ の中で } c_j(G/L) \text{ と結ぶ。} \end{array} \right.$$

これは各軌道ごとのホモトピーであるから、全体をあわせて $\varphi_i + \varphi_j \circ f$ をあらわす貼りつけ写像 φ_i' に実現できる。φ_i のかわりに φ_i' を使って e_i^{r-1} を貼り、上記のホモトピーの実現する貼り方によって一次元高い e_i^r を貼り直した G-CW(γ)-複体を Z' とすると、明らかに (Z, X) と (Z', X) とは

elementary expansion によって結ばれる。これを繰り返せば恒等行列によってあらわされる G-CW(γ)-対と結ばれるわけであるが、明らかに恒等行列のあらわす変型は elementary expansion であるから、$(Z, X) = 0 \in Wh_G(X, \gamma)$ が示された。

最後に、対応が全射であることを示す。$Wh_G(X, \gamma)$ の元を代表する行列をとる。その各成分にあらわれる object $x: G/H \to X$ とその (auto)morphism
$$\begin{tikzcd} G/H \arrow[r, "x"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\omega"] & X \\ G/H \arrow[r, "x"] & X \end{tikzcd}$$
に対して、

$G \times_H S(\gamma(x)) \longrightarrow G/H \longrightarrow X$ を貼りつけ写像とする r-1-cell と、$G \times_H S(\gamma(x) \oplus \mathbb{R}) \longrightarrow G/H \times I \xrightarrow{\omega} X$ を貼りつけ写像とする r-cell とを一つずつ X に貼りつける。こうしてできた複体を Z とすると、作り方から明らかに $X \subset Z$ はレトラクションを持ち、Z と X とはホモロジー同値である。

任意の $H < G$ に対して、H-fixed point set を考えて比較すると、[CW, Lemma 5.1] の結果により、$C(Z, X) \sim 0$ は $C(\tilde{Z}^H, \tilde{X}^H) \sim 0$ を与えることがわかる。$\tilde{Z}^H$ は単連結だからこれは $Z^H \simeq X^H$ を意味しており、従って Z と X とが G-ホモトピー同値であることがわかる。従って (Z, X) のレトラクションは G-強 deformation retract となり、$Wh_G(X, \gamma)$ の元を与える。 [証明終]

次に、G-多様体に対して、単純ホモトピーの構造を与えよう。Mをコンパクトなsmooth G-多様体，$\mu(M)$ をその接バンドルによる表現とする。Illman [I2]により、Mには自然なG-triangulationがある。Illmanの議論は古典的な多様体の単体分割の議論をそのまま拡張したものであるので、これを我々の立場からそのまま見直すことにより、実際に古典的な多様体の分割とその双対分割の構成がG-CW(オ)-複体の構造を与えていることがわかる。

実際、MにIllmanの与えたG-triangionの双対分割（各単体の星状近傍をcellとする分割）をとれば、これが自然なG-CW($\mu(M)$)-複体の構造を与えている。

一方、§2で述べた[CW]のホモロジーの構成とPoincaré双対性の証明は、古典的な双対分割に基く議論の拡張であるから、[CW]のPoincaré双対同型（定理B）は、上記の双対分割に基く対応となっている。

<u>命題2.</u> $\mu = \mu(M)$ と書く。MのG-triangulationから定まるG-CW(μ)-構造は、互いに単純ホモトピー同値である。

[証明]　二つの構造C, C' をとり、それぞれの双対分割をD, D' とする。Illman [I2] により、DとD'は共通細

分 D'' を持つ。チェインの段階では

$$C_*(M;D) \longleftarrow C_*(M;D'') \longrightarrow C_*(M;D')$$

は単純ホモトピー同値である。([I1, §2], [C, 25.1])
これは代数的な torsion が消えることを意味するのだから、定理1を使って、幾何的な意味で M の二つの G-$CW(\mu)$-構造が単純ホモトピー同値となることがわかる。　[証明終]

<u>定理3.</u>　M がコンパクトな smooth G-多様体ならば、定理Bにおける Poincaré 同型対応

$$-\cap[M,\partial M] : C^*(M,\partial M;\mathcal{A}_G) \longrightarrow C_{\mu(M)-*}(M;\mathcal{A}_G)$$

は単純ホモトピー同値である。

[証明]　上記の補題により、

$$C_{\mu(M)}(M)(x) \cong \sum_{x_0:M\text{の}0\text{-cell}} \hat{\pi}(M;G)(x,x_0)$$

であり、これが単純ホモトピーを定める base を与えるのであった。定理Bの基本類 $[M,\partial M] \in C_{\mu(M)}(M)$ は、この対応により、各 0-cell での「homological orientation」に対応している([CW], 7.2)。そこで、M の G-$CW(\mu)$-構造を前記の標準的な G-triangulation から来るものにとっておけば、定理Bにおける双対性の対応は、実際に、一つの cell の表わす base の元に対して、その重心細分での星状近傍にあ

らわれる単体を一回ずつ通る元を対応させることが確かめられる。このことにより、定理Bの対応が(細分を除いて)チェインの段階で単純ホモトピー同値を与えていることがわかる。上記の命題2により、細分による取り替えにはよらないことがわかっているので、定理が得られる。　　[証明終]

§4. 異なる表現の下での単純性

今までの議論は、Whitehead torsionが $Wh_G(X,\gamma)$ の元、すなわち固定された表現 γ の範囲内でのものであった。
G-surgeryの設定では、互いに異なる表現の下の空間の間のdegree 1 写像を扱うことが必要となる。X が G-CW(γ)-複体，Y が G-CW(δ)-複体のとき、$f: X \to Y$ が単純ホモトピー同値かどうかを考えたい。

<u>定義</u>. G-CW(γ,δ)-複体とは、G-CW(γ)-複体であって、かつさらに細分すると G-CW($\gamma \oplus \delta$)-複体の構造を持つものとする。

前節までのG-CW(γ)-複体についての議論は、そのまま

G-$CW(\gamma\oplus\delta)$-複体についての議論に拡張することができる。

補題。　二つの G-$CW(\gamma,\delta)$-複体が G-$CW(\gamma,\delta)$-単純ホモトピー同値ならば、G-$CW(\gamma)$-単純ホモトピー同値である。

［証明］　一つの G-$CW(\gamma,\delta)$-elementary expansion を

$$\begin{array}{l} e^r = G\times_H D(V\oplus W\oplus \mathbb{R}) = G\times_H D(V\oplus W)\times I \\ \cup \\ e^{r-1} = G\times_H \left(D(V\oplus W)\times\{1\} \cup S(V\oplus W)\times I \right) \end{array}$$

とする。空間 $G\times_H D(V\oplus W)$ を、G-$CW(G\times_H V)$-複体として分割する。e^rは、この空間と I との直積の G-$CW(G\times_H V)$-複体と同相である。e^{r-1} は、この空間と $S(V\oplus W)\times I$ とを合わせたものと同相である。e^r と e^{r-1} の、元来の G-$CW(G\times_H V)$-複体としての構造とこの構造とを比較して、各成分で G-$CW(G\times_H V)$-複体として単純ホモトピー同値であることが確かめられる。　［証明終］

この補題により、「forgetful homomorphism」

$$Wh_G(X,(\gamma,\delta)) \xrightarrow{\phi} Wh_G(X,\gamma)$$

が得られる。

命題4. $Wh_G(X,(\gamma,\delta)) \xrightarrow{\cong} Wh_G(\hat{\iota}X,\gamma\oplus\delta) \xleftarrow{\cong} Wh_G(X,\gamma\oplus\delta)$
は同型である。

[証明] 右側の矢印は定理1そのものである。左側の矢印も、定理1の証明をそのままたどることにより得られる。(過剰な構造を考えていても、cellular 近似定理により必要な写像を取り替えれば、チェイン段階では差が生じないからである。) [証明終]

系. $Wh_G(X,\gamma) \xrightarrow{\sigma_V} Wh_G(X\times DV,(\gamma,V))$ は split injective である。(ただし $\sigma_V : Z \mapsto Z\times DV$)

[証明] G-CW(γ)-複体としては $X\times DV$ と X とは単純ホモトピー同値であるから、逆対応

$$Wh_G(X\times DV,(\gamma,V)) \cong Wh_G(X\times DV,\gamma\oplus V) \xrightarrow{\phi} Wh_G(X\times DV,\gamma) \cong Wh_G(X,V)$$

が得られる。

この系により、「安定 Whitehead 群」が定義できる。

定義. $\mathcal{W}h_G(X) = \varinjlim_V Wh_G(X\times DV,(\gamma,V))$
とおく。上の系により、これは $Wh_G(X,\gamma)$ を直和因子に含む。

そこで、次のような状況を考える。Mを単純 G-CW(ξ)-Poincaré複体, Xを単純 G-CW(γ)-Poincaré複体とし、$f: M \to X$をG-ホモトピー同値であって$f_{\#}: \pi M \to \pi X$が基本groupoidの同型とする。さらに、fにより導かれる対応$\xi \longrightarrow \gamma$が単純ホモトピー同値, すなわち各cellにおいて$f: (D\xi, S\xi) \longrightarrow (D\gamma, S\gamma)$が非同変の意味で単純ホモトピー同値と仮定する。

命題5. 以上の仮定の下に、もし$f: M \to X$が非同変に単純ホモトピー同値ならば、$\tau(f) = 0 \in Wh_G(X)$となる。

〔証明〕 $\xi \to \gamma$に関する仮定により、それぞれに指定したbaseの下で可換図式

$$\begin{array}{ccc} C^*(M) & \longrightarrow & C_{\xi-*}(M) \\ \uparrow & & \downarrow \\ C^*(X) & \longrightarrow & C_{\gamma-*}(X) \end{array}$$

が得られる。

上辺、下辺は仮定により単純同値である。fの仮定から、双対分割に関する写像である左辺が単純同値になる。従って可換性から右辺も単純同値であるが、上記の系4によって表現によらずに単純性が決まるから、$\tau(f) = 0$となる。〔証明終〕

この命題を用いれば、〔CW2〕における特別の「gap仮定」の下に、〔CW2〕の意味での「π-π-定理」の、単純ホモトピ

一同値への一般化が得られると思われる。

文献表

[A] S. Araki, Equivariant Whitehead groups and G-expansion categories, preprint.

[C] M. M. Cohen, A course in simple homotopy theory, GTM 10, Springer, 1973.

[CMW] S. R. Costenoble, J. P. May and S. Waner, Equivariant orientation theory, preprint.

[CW] S. R. Costenoble and S. Waner, Equivariant Poincaré duality, preprint.

[CW2] ——, The equivariant Spivak normal bundle and equivariant surgery, preprint.

[I1] S. Illman, Whitehead torsion and group actions, Ann. Acad. Sci. Fenn. AI 588 (1974).

[I2] ——, Smooth equivariant triangulations of G-manifolds for G a finite group, Math. Ann. 233 (1978), 199-220.

[L] W. Lück, Transformation groups and algebraic K-theory, LNM 1408, Springer, 1989.

[M] J. Milnor, Whitehead torsion, Bull. AMS, 72 (1966), 358-426.

[W] C. T. C. Wall, Surgery on compact manifolds, Academic Press, 1970.